**Лекція 9**

**9.1. Однорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь.**

**Загальний розв’язок. Фундаментальна система розв’язків**

Система лінійних рівнянь називається **однорідною**, якщо праві частини цих рівнянь дорівнюють нулю:



**Властивості однорідної СЛАР**

1. Однорідна СЛАР завжди сумісна, тому що розширена матриця відрізняється від основної на стовпець, який є нуль-вектором. Оскільки система, яка має нуль-вектор завжди лінійно залежна, то ранг розширеної матриці збігається з рангом основної. Система завжди має тривіальний розв’язок:

.

1. Сума розв’язків однорідної СЛАР токож є її розв’язком.
2. Добуток розв’язку однорідної СЛАР на будь-яке число також є розв’язком системи.
3. Будь-яка лінійна комбінація розв’язків однорідної СЛАР є розв’язком системи.

Якщо ранг матриці однорідної системи дорівнює , то система має  лінійно незалежних (а, отже, ненульових) розв’язків.

Будь-яку сукупність з  лінійно незалежних розв’язків однорідної СЛАР називають **фундаментальною системою розв’язків (ФСР)**.

**Теорема 9.1.** (Про структуру загального розв’язку однорідної СЛАР).

Якщо  ― ФСР однорідної СЛАР, то загальний розв’язок цієї системи є лінійною комбінацією розв’язків :

.

Вектори  утворюють **базис підпростору розв’язків системи розмірності .**

**Приклад 9.1.** Знайти загальний розв’язок однорідної системи та ФСР.

**.

Розв’язання. Для дослідження та пошуку розв’язків скористаємося методом Гаусса – Жордано.

**

**

**

**

**;**.

Таким чином, **― базисні змінні, **― вільні змінні.

Перетворена матриця відповідає системі:

**.

Загальний розв’язок записується у вигляді:

**

Відповідь: Загальний розв’язок:

**.

ФСР: **.

Розв’язки прикладу складають лінійний підпростір розмірності *n-r*. Розмірність підпростору, який описаний однорідною системою, дорівнює 2. Вектори  є базисом цього підпростору.

**Кожний лінійний підпростір можна подати як сукупність розв’язків відповідно підібраної системи лінійних рівнянь.**

**Теорема 9.2***.* Однорідна система, у якої однакове число невідомих і рівнянь, тільки тоді має ненульовий розв’язок, коли визначник системи дорівнює нулю. Якщо визначник цієї системи відмінний від нуля, то система має тільки нульовий (тривіальний) розв’язок.

**Доведення**. Нехай задано систему

.

Однорідна система має ненульовий розв’язок, якщо число рівнянь (невідомих) більше за ранг матриці, тобто більше за порядок *r* базисного мінору *(n>r)*, а це означає, що всі мінори *r+1, r+2, …, n* дорівнюють нулю. Це і є доведенням теореми.●

Два рівняння називаються **незалежними**, якщо внаслідок лінійних операцій над рівняннями (додавання і множення на число) жодне з них не можна привести до іншого. Якщо в системі немає рівнянь, які є лінійною комбінацією інших рівнянь цієї системи, то кажуть, що система складається з незалежних рівнянь. Число рівнянь при цьому збігається з рангом матриці. Метод Гаусса зручний тому, що при поданні системи у певній формі число рівнянь після відкидання тих, які повторюються, дорівнює рангу матриці.

**9.2. Неоднорідна система лінійних алгебраїчних рівнянь.**

**Загальний і частинний розв’язки**

Розглянемо неоднорідну СЛАР:



і відповідну їй однорідну СЛАР:

.

Теорема 9.3. (Про структуру загального розв’язку неоднорідної СЛАР).

Загальний розв’язок неоднорідної СЛАР дорівнює сумі загального розв’язку відповідної однорідної системи і деякого частинного розв’язку неоднорідної СЛАР: .

**Приклад 9.2.** Знайти загальний розв’язок системи:

**.

**Розв’язання.** Застосуємо метод Гаусса-Жордано:

Крок 1. **.

Крок 2. *~*.

Крок 3. **. Система сумісна.

Крок 4. *~*.

Крок 5.  і - базисні змінні, а - вільні змінні.

Випишемо систему, що утворилася після перетворень:

**.

Крок 6. Загальний розв’язок системи:

**.

Перетворимо запис загального розв’язку:

**.

Відповідь: **.